第27卷 第3期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 3
2010年06月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS June 2010

**文章编号**:1005-3085(2010)03-0446-09

# 可列$m$重非齐次马氏链的遍历性与熵率*

姜 蕾[1], 王 豹[2]

(1- 鲁东大学数学与信息学院，烟台 264025; 2- 徐州工程学院，徐州 221008)

**摘 要**: 本文在研究可列$m$重非齐次马氏链各种遍历性定义的基础上，以转移概率引入可列$m$重非齐次马氏链绝对平均强遍历性的概念，通过设定可列$m$重非齐次马氏链满足这种强遍历的充分条件，得出可列$m$重非齐次马氏链泛函的一个极限定理，并应用此极限定理得到了可列$m$重非齐次马氏链熵率存在的一个定理。

**关键词**: 非齐次马氏链；遍历性；转移矩阵

**分类号**: **AMS**(2000) 60J20 **中图分类号**: O211.62 **文献标识码**: A

## 1 引言

关于非齐次马氏链的强遍历性和$C$-强遍历性已有不少研究，参见文献 [1-4]。文献 [5] 是用范数定义非齐次马氏链绝对平均强遍历性，并给出满足这种强遍历性的一个充要条件。本文则是用转移概率定义可列$m$重非齐次马氏链的绝对平均强遍历性，目的是得到满足这种强遍历性的一个充分条件，并得出可列$m$重非齐次马氏链泛函的一个极限定理，最后应用此极限定理得到了可列$m$重非齐次马氏链熵率存在的一个定理，进而将非齐次马氏链的结论推广到可列$m$重非齐次马氏链。

设$\{X_n, n \geq 0\}$是在状态空间$S$上的可列$m$重非齐次马氏链，其中$S = \{1, 2, \cdots\}$，其初始分布与转移矩阵列分别为

$$q(i_0, \cdots, i_{m-1}), \quad i_0, \cdots, i_{m-1} \in S, \tag{1}$$

$$P_n = \big(p_n(j \mid i_1, \cdots, i_m)\big), \quad j, i_1, \cdots, i_m \in S. \tag{2}$$

其中

$$q(i_0, \cdots, i_{m-1}) = P(X_0 = i_0, \cdots, X_{m-1} = i_{m-1}),$$

$$p_n\big(j \mid i_1, \cdots, i_m\big) = P\big(X_n = j \mid X_{n-m} = i_1, \cdots, X_{n-1} = i_m\big).$$

记

$$i^m = (i_1, \cdots, i_m), \quad j^m = (j_1, \cdots, j_m), \quad r^m = (r_1, \cdots, r_m).$$

记其$t$步转移概率为

$${}_np^{(t)}(j \mid i^m) = P\big(X_{n+t-1} = j \mid X_{n-m} = i_1, \cdots, X_{n-1} = i_m\big), \tag{3}$$

**收稿日期**: 2008-08-20. **作者简介**: 姜蕾 (1981年11月生)，女，硕士. 研究方向：概率论极限理论.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (10571076).

易知

$$ {}_np^{(t)}(j \mid i^m) = \sum_{r\in S} p_n(r \mid r^m)_{n+1}p^{(t-1)}\big(j \mid r, i_1, \cdots, r_m\big), \tag{4}$$

则其 $t$ 步转移矩阵列为

$$ {}_nP^{(t)} = \big({}_np^{(t)}(j \mid i_1, \cdots, i_m)\big). $$

设

$$ P = \big(p\,(j \mid i^m)\big), \quad j \in S, \quad i^m \in S^m, \tag{5}$$

是一 $m$ 阶转移矩阵，定义一 $m$ 维转移矩阵如下

$$ \bar{P} = \big(\bar{p}(j^m \mid i^m)\big), \quad i^m,\ j^m \in S^m, \tag{6}$$

其中

$$ \bar{p}(j^m \mid i^m) = \begin{cases} p\,(j_m \mid i^m), & j_v = i_{v+1} \\ 0, & j_v \neq i_{v+1} \end{cases} \quad v = 1, 2, \cdots, m-1. \tag{7}$$

称为由 $m$ 阶转移矩阵 $P$ 所确定的 $m$ 维转移矩阵。

令 $Z_n = (X_n, \cdots, X_{n+m-1})$，则 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 为一阶 $m$ 维非齐次马氏链。记

$$ \bar{p}_n\big(j^m \mid i^m\big) = P\big(Z_n = j^m \mid Z_{n-1} = i^m\big) \tag{8}$$

为 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 的转移概率。其中

$$ \bar{p}_n\big(j^m \mid i^m\big) = \begin{cases} p_{n+m-1}\big(j_m \mid i^m\big) & j_v = i_{v+1} \\ 0 & j_v \neq i_{v+1} \end{cases} \quad v = 1, 2, \cdots, m-1, \tag{9}$$

则

$$ \bar{P}_n = \big(\bar{p}_n(j^m \mid i^m)\big) \tag{10}$$

为由 $m$ 阶转移矩阵 $P_{n+m-1}$ 确定的 $m$ 维转移矩阵。

令

$$ \bar{p}^{(n,n+t)}\big(j^m \mid i^m\big) = P\big(Z_{n+t-1} = j^m \mid Z_{n-1} = i^m\big) \tag{11}$$

为 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 的 $t$ 步转移概率，得

$$ \bar{p}^{(n,n+t)}\big(j^m \mid i^m\big) = \sum_{r^m} \bar{p}_n\big(r^m \mid i^m\big)\bar{p}^{(n+1,n+t)}\big(j^m \mid r^m\big), \tag{12}$$

则

$$ \bar{P}^{(n,n+t)} = \big(\bar{p}^{(n,n+t)}(j^m \mid i^m)\big) \tag{13}$$

为 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 的 $t$ 步转移矩阵列。易得

$$ \bar{P}^{(n,n+t)} = \bar{P}_n \cdots \bar{P}_{n+t-1}. $$

**定义 1** $\{X_n,\ n \geq 0\}$ 为定义在 $S = \{1, 2, \cdots\}$ 上的可列 $m$ 重非齐次马氏链，如果对任意的 $j \in S$，$i^m \in S^m$，存在不依赖于 $i^m \in S^m$ 的 $\pi(j)$ 使得

$$ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j\in S} \big|{}_kp^{(t)}\big(j \mid i^m\big) - \pi(j)\big| = 0, \tag{14}$$

则称$\{X_n, n \geq 0\}$为绝对平均强遍历的，也称$P_n$为绝对平均强遍历的。

**定义2** $\{Z_n, n \geq 0\}$为一阶$m$维非齐次马氏链，如果对任意的$i^m$，$j^m \in S^m$，存在不依赖于$i^m \in S^m$的$\pi(j^m)$使得

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{i^m \in S^m} \left| \overline{p}^{(k,k+n)}\left(j^m \mid i^m\right) - \pi(j^m) \right| = 0, \tag{15}$$

则称$\{Z_n, n \geq 0\}$为强遍历的，也称$\bar{P}_n$为强遍历的。

**定义3** $\{Z_n,\ n \geq 0\}$为一阶$m$维非齐次马氏链，如果对任意的$i^m$，$j^m \in S^m$，存在不依赖于$i^m \in S^m$的$\pi(j^m)$，使得

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} \left| \overline{p}^{(k,k+t)}\left(j^m \mid i^m\right) - \pi(j^m) \right| = 0, \tag{16}$$

则称$\{Z_n, n \geq 0\}$为绝对平均强遍历的，也称$\bar{P}_n$为绝对平均强遍历的。

**引理1**[5] 设$\{a_n, n \geq 1\}$是一数列，$a$为一实数，如果

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k - a| = 0, \tag{17}$$

则 i) 对任正整数$m$有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{m+k} - a| = 0, \tag{18}$$

ii) 存在$\{a_n, n \geq 1\}$的一个子列$\{a_{n_k}, k \geq 1\}$，使

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = a. \tag{19}$$

## 2 主要结果

**定理1** $\{X_n, n \geq 0\}$为可列$m$重非齐次马氏链如前定义，$P$是一个$m$阶转移矩阵，$\bar{P}$是由$P$所确定的$m$维转移矩阵，且$\bar{P}$是强遍历的，若

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{n} \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j \in S} \left| p_k\left(j \mid i^m\right) - p(j \mid i^m) \right| = 0, \tag{20}$$

则

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \sup_{i^m \in S^m} \sum_{j^m \in S^m} \left| \overline{p}^{(k,k+t)}(j^m \mid i^m) - \pi(j^m) \right| = 0, \tag{21}$$

即$\bar{P}_n$为绝对平均强遍历的，其中$\{\pi(j^m), j^m \in S^m\}$是$\bar{P}$所确定的平稳分布。

**证明** 由于

$$\bar{p}_{k+1}\left(j^m \mid r^m\right) = \begin{cases} p_{k+m}\left(j_m \mid r^m\right), & j_v = r_{v+1}, \\ 0, & j_v \neq r_{v+1}, \end{cases} \quad v = 1, 2, \cdots, m-1,$$

同理

$$\bar{p}\left(j^m \mid r^m\right) = \begin{cases} p\left(j_m \mid r^m\right), & j_v = r_{v+1}, \\ 0, & j_v \neq r_{v+1}, \end{cases} \quad v = 1, 2, \cdots, m-1.$$

所以

$$\sup_{r^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}_{k+1}(j^m\mid r^m)-\overline{p}(j^m\mid r^m)\right|$$

$$=\sup_{r^m\in S^m}\sum_{j_m\in S}\left|p_{k+m}(j_m\mid r^m)-p(j_m\mid r^m)\right|. \tag{22}$$

同理

$$\sup_{i^m\in S^m}\sum_{r^m\in S^m}\left|\overline{p}_k(r^m\mid i^m)-\overline{p}(r^m\mid i^m)\right|$$

$$=\sup_{i^m\in S^m}\sum_{r_m\in S}\left|p_{k+m-1}(r_m\mid i^m)-p(r_m\mid i^m)\right|. \tag{23}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(k,k+2)}(j^m\mid i^m)-\overline{p}^{(2)}(j^m\mid i^m)\right|\\
\le&\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\sum_{r^m\in S^m}\overline{p}_k(r^m\mid i^m)\overline{p}_{k+1}(j^m\mid r^m)-\sum_{r^m\in S^m}\overline{p}_k(r^m\mid i^m)\overline{p}(j^m\mid r^m)\right|\\
&+\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\sum_{r^m\in S^m}\overline{p}_k(r^m\mid i^m)\overline{p}(j^m\mid r^m)-\sum_{r^m\in S^m}\overline{p}(r^m\mid i^m)\overline{p}(j^m\mid r^m)\right|\\
=&\sup_{r^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}_{k+1}(j^m\mid r^m)-\overline{p}(j^m\mid r^m)\right|+\sup_{i^m\in S^m}\sum_{r^m\in S^m}\left|\overline{p}_k(r^m\mid i^m)-\overline{p}(r^m\mid i^m)\right|\\
\le&\sup_{r^m\in S^m}\sum_{j_m\in S}\left|p_{k+m}(j_m\mid r^m)-p(j_m\mid r^m)\right|\\
&+\sup_{i^m\in S^m}\sum_{r_m\in S}\left|p_{k+m-1}(r_m\mid i^m)-p(r_m\mid i^m)\right|.
\end{aligned}\tag{24}$$

由(20)式与(24)式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(k,k+2)}(j^m\mid i^m)-\overline{p}^{(2)}(j^m\mid i^m)\right|=0. \tag{25}$$

由归纳法，对任意的$v>0$有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(k,k+v)}(j^m\mid i^m)-\overline{p}^{(v)}(j^m\mid i^m)\right|=0. \tag{26}$$

由于$\bar{P}$是强遍历的，对任意的$\varepsilon>0$，存在$v_0$，使得

$$\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(v_0)}(j^m\mid i^m)-\pi(j^m)\right|<\varepsilon,$$

$$\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(v_0+1)}(j^m\mid i^m)-\overline{p}^{(v_0)}(j^m\mid i^m)\right|<\varepsilon. \tag{27}$$

易知，若 $\{\pi(j^m), j^m \in S^m\}$ 是 $\bar{P}$ 的平稳分布，则有

$$\pi(j^m) = \sum_{i^m \in S^m} \pi(i^m)\bar{p}\left(j^m \mid i^m\right).$$

故由 (27) 式有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(1,1+t)}\left(j^m \mid i^m\right)-\pi(j^m)\right| \\
=\ &\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{v_0}\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(1,1+t)}\left(j^m \mid i^m\right)-\pi(j^m)\right| \\
&+\frac{1}{n}\sum_{t=v_0+1}^{n}\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(1,1+t)}\left(j^m \mid i^m\right)-\pi(j^m)\right| \\
\le\ &\frac{2v_0}{n}+\frac{1}{n}\sum_{t=v_0+1}^{n}\sup_{r^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(t-v_0,1+t)}\left(j^m \mid r^m\right)-\overline{p}^{(v_0)}\left(j^m \mid r^m\right)\right| \\
&+\frac{1}{n}\sum_{t=v_0+1}^{n}\sup_{r^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(v_0)}\left(j^m \mid r^m\right)-\pi(j^m)\right| \\
\le\ &\frac{2v_0}{n}+\frac{1}{n}\sum_{t=v_0+1}^{n}\sup_{r^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(t-v_0,1+t)}\left(j^m \mid r^m\right)-\overline{p}^{(v_0)}\left(j^m \mid r^m\right)\right|+\varepsilon,
\end{aligned}\tag{28}$$

又

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{t=v_0+1}^{n}\sup_{r^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(t-v_0,1+t)}\left(j^m \mid r^m\right)-\overline{p}^{(v_0)}\left(j^m \mid r^m\right)\right| \\
=\ &\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-v_0}\sup_{r^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(t,t+v_0+1)}\left(j^m \mid r^m\right)-\overline{p}^{(v_0)}\left(j^m \mid r^m\right)\right| \\
\le\ &\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup_{r^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(t,t+v_0+1)}\left(j^m \mid r^m\right)-\overline{p}^{(v_0+1)}\left(j^m \mid r^m\right)\right| \\
&+\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup_{r^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(v_0+1)}\left(j^m \mid r^m\right)-\overline{p}^{(v_0)}\left(j^m \mid r^m\right)\right|.
\end{aligned}\tag{29}$$

由 (26) 式、(27) 式及 (29) 式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=v_0+1}^{n}\sup_{r^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(t-v_0,1+t)}\left(j^m \mid r^m\right)-\overline{p}^{(v_0)}\left(j^m \mid r^m\right)\right|=0.\tag{30}$$

故由 (28) 式与 (30) 式可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(1,1+t)}\left(j^m \mid i^m\right)-\pi(j^m)\right|=0.\tag{31}$$

易知，由 (20) 式及引理 1 可得，对任意正整数 $t$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n}\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j\in S}\left|p_{k+t}\left(j\mid i^m\right)-p\left(j\mid i^m\right)\right|=0. \tag{32}$$

类似于 (31) 式的证明，及 (32) 式可得 (21) 式成立。 **证毕**

由定理 1 的证明得出可列 $m$ 重非齐次马氏链绝对平均强遍历的一个充分条件。

**定理 2** 设 $\{X_n, n\ge 0\}$ 为可列 $m$ 重非齐次马氏链如前定义，$P$ 是一个 $m$ 阶转移矩阵，$\bar{P}$ 是由 $P$ 所确定的 $m$ 维转移矩阵且是强遍历的，若对任意的 $k$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\bar{p}^{(k,k+t)}\left(j^m\mid i^m\right)-\pi(j^m)\right|=0, \tag{33}$$

又设 $g_n(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在 $S^m$ 上的函数，$g_n$ 与 $g$ 均是列向量，其分量分别为 $g_n(j^m)$ 与 $g(j^m)$，设

$$\sup_{j^m\in S^m}\left|g_n(j^m)\right|\le M,$$

满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup_{j^m\in S^m}\left|g_t(j^m)-g(j^m)\right|=0, \tag{34}$$

设

$$\varphi^{(k,k+n)}(i^m)=E\left\{\sum_{t=k+1}^{k+n}g_t\left(X_t^{t+m-1}\right)/n\,\middle|\,X_k^{k+m-1}=i^m\right\},$$

$\varphi^{(k,k+n)}$ 也是列向量，分量为 $\varphi^{(k,k+n)}(i^m)$；$\varphi$ 也是列向量，其所有分量均为

$$\sum_{j^m\in S^m}g(j^m)\pi(j^m),$$

则对任何 $k$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{i^m\in S^m}\left|\varphi^{(k,k+n)}(i^m)-\sum_{j^m\in S^m}g(j^m)\pi(j^m)\right|=0, \tag{35}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}E\left\{\frac{1}{n}\sum_{t=k+1}^{k+n}g_t(X_t^{t+m-1})\right\}=\sum_{j^m\in S^m}g(j^m)\pi(j^m), \tag{36}$$

其中 $\{\pi(j^m), j^m\in S^m\}$ 是 $\bar{P}$ 所确定的平稳分布。

**证明** 由 (32) 及引理 1 知，存在 $\{g_n, n\ge 1\}$ 的一个子列 $\{g_{n_l}, l\ge 1\}$ 使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sup_{j^m\in S^m}\left|g_{n_l}(j^m)-g(j^m)\right|=0,$$

而由

$$\sup_{j^m\in S^m}\left|g_n(j^m)\right|\le M$$

知

$$\sup_{j^m\in S^m}\left|g(j^m)\right|\le M,$$

又由 (34) 及引理 1 知，对任何 $k$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup_{j^m\in S^m}\left|g_{k+t}(j^m)-g(j^m)\right|=0. \tag{37}$$

因为

$$\begin{aligned}
&\sup_{i^m\in S^m}\left|\varphi^{(k,k+n)}(i^m)-\sum_{j^m\in S^m}\pi(j^m)g(j^m)\right| \\
=&\sup_{i^m\in S^m}\left|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{j^m\in S^m}\overline{p}^{(k,k+t)}\left(j^m\mid i^m\right)g_{k+t}(j^m)-\sum_{j^m\in S^m}\pi(j^m)g(j^m)\right| \\
\le&\sup_{i^m\in S^m}\left|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{j^m\in S^m}\overline{p}^{(k,k+t)}\left(j^m\mid i^m\right)\left(g_{k+t}(j^m)-g(j^m)\right)\right| \\
&+\sup_{i^m\in S^m}\left|\sum_{j^m\in S^m}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\overline{p}^{(k,k+t)}\left(j^m\mid i^m\right)-\pi(j^m)\right)g(j^m)\right| \\
\le&\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup_{j^m\in S^m}\left|g_{k+t}(j^m)-g(j^m)\right| \\
&+\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\overline{p}^{(k,k+t)}\left(j^m\mid i^m\right)-\pi(j^m)\right|M.
\end{aligned} \tag{38}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\overline{p}^{(k,k+t)}\left(j^m\mid i^m\right)-\pi(j^m)\right| \\
\le&\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\overline{p}^{(k,k+t)}\left(j^m\mid i^m\right)-\pi(j^m)\right|,
\end{aligned}$$

故由 (33) 式及上式可得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j^m\in S^m}\left|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\overline{p}^{(k,k+t)}\left(j^m\mid i^m\right)-\pi(j^m)\right|=0. \tag{39}$$

所以由 (33) 式、(37) 式、(38) 式及 (39) 式可得 (35) 式。又因为

$$\begin{aligned}
&\left|E\left\{\frac{1}{n}\sum_{t=k+1}^{k+n}g_t(X_t^{t+m-1})\right\}-\sum_{j^m\in S^m}g(j^m)\pi(j^m)\right| \\
=&\left|\sum_{i^m\in S^m}P\left(X_k^{k+m-1}=i^m\right)\varphi^{(k,k+n)}(i^m)-\sum_{i^m\in S^m}P\left(X_k^{k+m-1}=i^m\right)\sum_{j^m\in S^m}g(j^m)\pi(j^m)\right| \\
\le&\sup_{i^m\in S^m}\left|\varphi^{(k,k+n)}(i^m)-\sum_{j^m\in S^m}g(j^m)\pi(j^m)\right|.
\end{aligned} \tag{40}$$

所以由 (35) 式及 (40) 式可得 (36) 式。 **证毕**

## 3 应用

$\{X_n, n \geq 0\}$是在$S=\{1,2,\cdots\}$中取值的随机变量序列，$H(X_0,\cdots,X_n)$表示随机向量$(X_0,\cdots,X_n)$的熵，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(X_0,\cdots,X_n)$$

存在，则称此极限为随机变量序列$\{X_n, n\geq 0\}$的熵率，记为$H(\{X_n\})$。易知[6]

$$H(X_0,\cdots,X_n)=H(X_0)+\sum_{k=m}^{n}H\left(X_k \mid X_0,\cdots,X_{k-1}\right). \tag{41}$$

又若$\{X_n, n\geq 0\}$为一$m$重马氏链，易证

$$\begin{aligned} H\big(X_k \mid X_0,\cdots,X_{k-1}\big) &= H\big(X_k \mid X_{k-m},\cdots,X_{k-1}\big)\\ &= -\sum_{i^m\in S^m}P\big(X_{k-m}^{k-1}=i^m\big)\sum_{j\in S}p_k\big(j \mid i^m\big)\log p_k\big(j \mid i^m\big), \end{aligned} \tag{42}$$

$$\frac{1}{n}H(X_0,\cdots,X_n)=\frac{1}{n}H(X_0)+\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n}H\big(X_k \mid X_{k-m}^{k-1}\big). \tag{43}$$

**定理3** 设$\{X_n, n\geq 0\}$是定义在$S=\{1,2,\cdots\}$上的可列$m$重非齐次马氏链，其初始分布与转移矩阵列分别如(1)式与(2)式定义，$P$是另一转移矩阵，$\bar{P}$是由$P$所确定的$m$维转移矩阵，且是强遍历的，设

$$g_n(i^m)=\sum_{j\in S}p_n\left(j \mid i^m\right)\log p_n\big(j \mid i^m\big),\quad g(i^m)=\sum_{j\in S}p\big(j \mid i^m\big)\log p\big(j \mid i^m\big), \tag{44}$$

$g_n$与$g$均是列向量，其分量分别为$g_n(j^m)$与$g(j^m)$

$$\sup_{j^m\in S^m}\big|g_n(j^m)\big|\leq M,\quad \forall\, j^m\in S^m,$$

如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n}\sup_{i^m\in S^m}\sum_{j\in S}\big|p_k\big(j \mid i^m\big)-p\big(j \mid i^m\big)\big|=0 \tag{45}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup_{j^m\in S^m}\big|g_t(j^m)-g(j^m)\big|=0, \tag{46}$$

则非齐次马氏链$\{X_n, n\geq 0\}$熵率存在，并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(X_0,\cdots,X_n)=-\pi g=-\sum_{i^m\in S^m}\pi(i^m)\sum_{j\in S}p\big(j \mid i^m\big)\log p\big(j \mid i^m\big), \tag{47}$$

其中$\{\pi(i^m), i^m\in S^m\}$是$\bar{P}$所确定的唯一平稳分布。

**证明** 由(45)式及定理1知(33)式成立，在定理2中设$g_n(i^m)$与$g(i^m)$由(44)式给出，并注意到

$$\begin{aligned}&Eg_n\big(X_{n-m}^{n-1}\big)\\&=\sum_{i^m\in S^m}P\big(X_{n-m}^{n-1}=i^m\big)\sum_{j\in S}p_n\big(j\mid i^m\big)\log p_n\big(j\mid i^m\big)\\&=H\big(X_n\mid X_{n-m}^{n-1}\big).\end{aligned}\tag{48}$$

由(33)式、(46)式、(32)式、(44)式、(43)式与(48)式可知(47)式成立。 **证毕**

## 参考文献：

[1] Isaacson D, Madsen R. Markov Chains Theory and Application[M]. New York: Wiley, 1976

[2] Huang C, Isaacson D, Binograde B. The rate of convergence of certain nonhomogeneous Markov chains[J]. Z Wahrscheinlichkeitstheorie and Verw Gebeite, 1976, 35: 141-146

[3] Bowerman B, David H T, Isaacson D. The convergence of Cesaro averages for certain nonstationary Markov chains[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1977, 5: 221-230

[4] Paz A. Introduction to Probabilistic Automate[M]. New York: Academic Press, 1971

[5] 杨卫国. 关于非齐次马氏链的绝对平均强遍历性及若干应用[J]. 数理统计与应用概率，1996, 3: 220-226
Yang W G. On the absolute mean strong ergodic for nonhomogeneous Markov chains and some applications[J]. Mathematical Statistics and Applied Probability, 1996, 3: 220-226

[6] Cover T M, Thomas J A. Elements of Information Theory[M]. New York: Wiley, 1991

# The Ergodic and Entropy Rate of $m$th-order Countable Nonhomogeneous Markov Chains

JIANG Lei[1], WANG Bao[2]

(1- School of Mathematics & Information, Ludong University, Yantai 264025;
2- Xuzhou Institute of Technology, Xuzhou 221008)

**Abstract:** On the basis of analyzing various definitions for ergodic, this paper introduces the notion of absolute mean strong ergodic of $m$th-order countable nonhomogeneous Markov chains by means of the transition probability. By setting a sufficient condition for the $m$th-order countable nonhomogeneous Markov chains, a limit theorem for the $m$th-order countable nonhomogeneous Markov chains functional is obtained. Furthermore, we get a theorem that the entropy rate of $m$th-order countable nonhomogeneous Markov chains exists by using this limit theorem.

**Keywords:** nonhomogeneous Markov chains; ergodic; transition matrix

**Received:** 20 Aug 2008. **Accepted:** 19 Feb 2009.
**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (10571076).